OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA (1. eta 2. partzialak)

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Ariketa 5	Ariketa 6	Ariketa 7	Ariketa 8	Ariketa 9	Guztira

Iraupena: 2 ordu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Hurrengo limiteak kalkulatu:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$ **(0,75 puntu)**

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)^{1/n}}{n^{1/n}-1}$ **(0,75 puntu)**

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}}\overset{(*)}{=}\frac{\infty}{1}=\infty$$

(*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ gai ez-negatiboz osaturiko serie dibergentea da $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ serie geometrikoa da, $r=\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ konbergentea da. Eta, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)^{1/n}}{n^{1/n}-1}\overset{(1)}{=}\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{1/n}-1\right)}\overset{(2)}{=}\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{L}\left(n^{1/n}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{L}n}{n}}=\frac{1}{0}=\infty$$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}\overset{(Z-E)}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\overset{(Z-E)}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1 \quad\Rightarrow\quad n^{1/n}-1\sim\mathrm{L}\left(n^{1/n}\right)$

2.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n\cdot n!}$ seriearen izaera.

(Puntu 1)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n\cdot n!}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ non $a_n>0\quad\forall n$.

D´Alambert-en irizpidea erabiliz:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{\pi^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{\pi^n\cdot n!}{n^n}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\frac{e}{\pi}<1\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konbergentea da.

3.- Kalkulatu $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\cdot(n+1)\cdot x^n$ berretura-seriearen batura, bere konbergentzia arloa zein den adieraziz.

(2 puntu)

$\exists S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\cdot(n+1)\cdot x^n\quad\forall x\in(-R,R)$. Eta, integragarria da tarte horretan:

$$\forall x\in(-R,R)\quad\int S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\cdot x^{n+1}\overset{(*)}{=}\frac{x}{1+\frac{x}{5}}=\frac{5x}{5+x}\quad\forall x\in(-5,5)$$

(*) Serie geometrikoa da, $r=-\frac{x}{5}\quad\Rightarrow\quad\left[\text{konbergentea}\quad\Leftrightarrow\quad r=\frac{|x|}{5}<1\quad\Leftrightarrow\quad x\in(-5,5)\right]$

Eta, emaitza hori deribatuz:

$$S(x)=\left(\frac{5x}{5+x}\right)'=\frac{5(5+x)-5x}{(5+x)^2}=\frac{25}{(5+x)^2}\quad\forall x\in(-5,5)$$

<u>Oharra</u>: Berretura-serie hau ezin da konbergentea izan $x=\pm5$ puntuetan. Izan ere, bere konbergentzi-arlo $[-5,5]$ tartea balitz, integragarria litzateke tarte horretan, baina bere integrala serie geometrikoa zen, eta, tarte irekian, bakarrik, konbergentea izan daiteke.

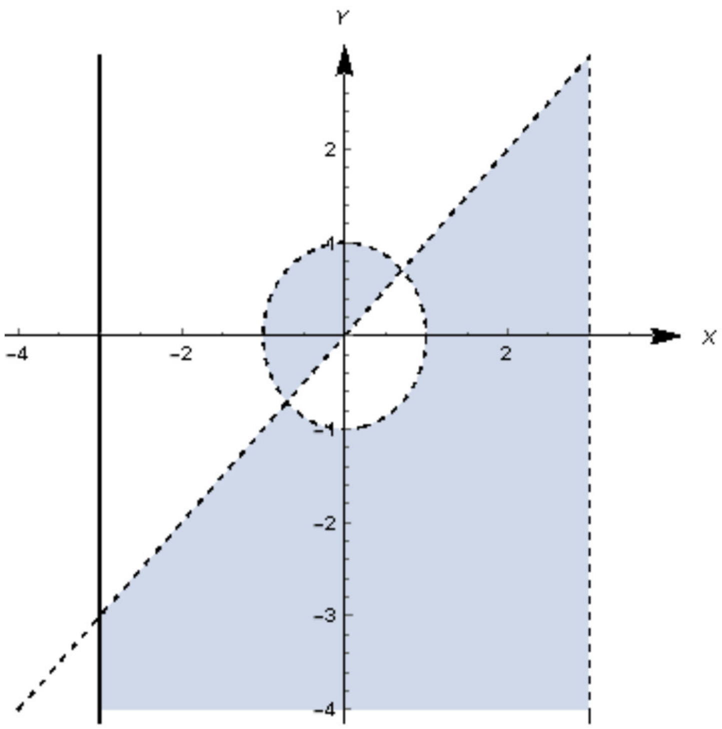
4.- Hurrengo funtzioaren definizio-eremua analitiko eta grafikoki lortu:

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}\left[(x-y)\cdot\left(x^2+y^2-1\right)\right]}{\arccos\left(\dfrac{x}{3}\right)}$$

(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x-y)\cdot\left(x^2+y^2-1\right)>0, \arccos\left(\frac{x}{3}\right)\neq 0, -1\leq\frac{x}{3}\leq 1\right\}$$

- $(x-y)\cdot\left(x^2+y^2-1\right)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x-y>0 \text{ eta } x^2+y^2-1>0 \\ \text{edo} \\ x-y<0 \text{ eta } x^2+y^2-1<0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>y \text{ eta } x^2+y^2>1 \\ \text{edo} \\ x<y \text{ eta } x^2+y^2<1 \end{cases}$
- $\arccos\left(\dfrac{x}{3}\right)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x}{3}\neq 1 \quad\Leftrightarrow\quad x\neq 3$
- $-1\leq\dfrac{x}{3}\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad -3\leq x\leq 3$



5.- Izan bedi $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{e^x-e^{-y}}{x+y} & \forall (x,y)/x+y\neq 0 \\ e^x & \forall (x,y)/x+y=0 \end{cases}$ **funtzioa. Kalkulatu** $f'_x(0,0)$ **eta** $f'_y(0,0)$**.** **(Puntu 1)**

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-1}{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1-h}{h^2}\overset{(L'H)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{2h}\overset{(L'H)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^h}{2}=\frac{1}{2}$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{1-e^{-k}}{k}-1}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1-e^{-k}-k}{k^2}\overset{(L'H)}{=}\lim_{k\to 0}\frac{e^{-k}-1}{2k}\overset{(L'H)}{=}\lim_{k\to 0}\frac{-e^{-k}}{2}=-\frac{1}{2}$$

6.- $T(x,y,z)=10\cdot\left(x\cdot e^{-y^2}+z\cdot e^{-x^2}\right)$ **funtzioak biltegi zilindriko baten tenperatura adierazten du. Espazioko (0,0,1) puntuan kokatzen bagara:**

a) Kalkulatu tenperaturaren aldakuntzaren abiadura (2,3,1) puntura zuzen abiatzen bagara.

b) Zein norabidetan zehar mugitu beharko genuke tenperatura ahalik eta azkarren jaisteko?

(2 puntu)

a) $P(x,y,z)=(0,0,1)$ eta $Q(x,y,z)=(2,3,1)$ puntuak elkartzen dituen zuzenaren norabide-bektorea $\vec{u}=(2,3,0)$ da.

$$|\vec{u}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\quad\Rightarrow\quad \vec{u}=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}},0\right)\ \text{unitarioa.}$$

Tenperaturaren aldakuntzaren abiadura norabide horretan deribatu direkzionalak ematen du, eta, T funtzio diferentziagarria denez, honela kalkula daiteke:

$$\left.\frac{dT}{d\vec{u}}\right|_P=\overrightarrow{\nabla T}(P)\cdot\vec{u}$$

$$\left.\begin{array}{r} T'_x=10\cdot e^{-y^2}-20xz\cdot e^{-x^2}\quad\Rightarrow\quad T'_x(P)=10 \\ T'_y=-20xy\cdot e^{-y^2}\quad\Rightarrow\quad T'_y(P)=0 \\ T'_z=10\cdot e^{-x^2}\quad\Rightarrow\quad T'_z(P)=10 \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{\nabla T}(P)=(10,0,10)$$

Orduan:

$$\left.\frac{dT}{d\vec{u}}\right|_P=\overrightarrow{\nabla T}(P)\cdot\vec{u}=(10,0,10)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}},0\right)=\frac{20}{\sqrt{13}}$$

b) Tenperatura ahalik eta arinen jaisteko, gradientearen kontrako noranzkoan mugitu behar da, hau da: $-\overrightarrow{\nabla T}(P)\,||\,(-1,0,-1)$.

7.- $f(x,y) = x^2 + y - x - xy$ **funtzioaren mutur absolutuak kalkulatu** $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - 1 \le y \le 3\right\}$ **multzoan.** **(2 puntu)**

f funtzio jarraitua da $\mathbb{R}^2$ osoan, eta, *M* multzo itxi eta mugatua da beraz, Weirtrass-en teoremak multzo horretan *f*-ren maximo eta minimo absolutuak daudela zirtatzen du.

Puntu kritikoak kalkulatzen hasiko gara:

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 1 - y = 0 \\ f'_y = 1 - x = 0 \iff x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (1,1)} \text{ puntu kritikoa dugu, eta, } A \in M$$

Orain M-ren mugan egon daitezkeen puntu kritikoak kalkulatuko ditugu. Hauek puntu kritiko baldintzatuak dira. M-ren mugan 3 zati bereiziko ditugu:

(1) $y = 3$ zatian:

$$f(x,y) = f(x,3) = x^2 + 3 - x - 3x = x^2 + 3 - 4x = F(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Beraz, $\boxed{B = (2,3)}$ puntu kritikoa dugu.

(2) $y = x^2 - 1$ zatian:

$$f(x,y) = f(x, x^2 - 1) = x^2 + x^2 - 1 - x - x(x^2 - 1) = -x^3 + 2x^2 - 1 = F(x)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \\ x = \dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{7}{9} \end{cases}$$

Beraz, $\boxed{C = (0,-1)}$ eta $\boxed{D = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{9}\right)}$ puntu kritikoak ditugu.

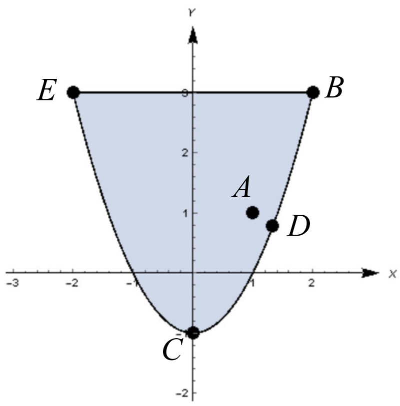
(3) $y = x^2 - 1$ eta $y = 3$ zatietan batera dauden puntuak (M multzoaren "erpinak"):

Lehen lortutako $B = (2,3)$ puntua, eta, $\boxed{E = (-2,3)}$.

Orain funtzioaren balioa puntu kritiko guztietan kalkulatzen dugu:

$$f(A) = 0 \quad f(B) = -1 \quad f(C) = -1 \quad f(D) = \frac{5}{27} \quad f(E) = 15$$

Orduan, *B* eta *C* minimo absolutuak dira eta *E* maximo absolutua da.



8.- Diferentziala erabiliz, $f(x,y)=e^{x\cdot y}$ funtzioaren balio hurbildua kalkulatu $P(x,y)=(1.1,-0.1)$ puntuan.

(Puntu 1)

f funtzio diferentziagarria da (x_0,y_0) puntuan $\Leftrightarrow$ $\Delta f \simeq df(x_0,y_0)$

non $\begin{cases}\Delta f = f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\\ df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy\end{cases}$, $\begin{cases}h=dx\to 0\\ k=dy\to 0\end{cases}$ izanik.

Kasu honetan $(x_0,y_0)=(1,0)$ puntua bada, orduan:

$(x_0+h,y_0+k)=(1.1,-0.1) \quad \Leftrightarrow \quad h=0.1$ eta $k=-0.1$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = y\cdot e^{x\cdot y} \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,0)=0 \\ f'_y = x\cdot e^{x\cdot y} \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,0)=1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad df(1,0)=-0.1$$

Orduan, $f(1.1,-0.1)-f(1,0)\simeq -0.1 \quad \Leftrightarrow \quad f(1.1,-0.1)\simeq f(1,0)-0.1=1-0.1=0.9$

9.- $\begin{cases}x\cdot\cos y+y\cdot\cos z+z\cdot\cos x=\pi\\ x^2+y^2+z^2-x\cdot y=\pi^2\end{cases}$ ekuazio-sistemak $\begin{cases}y=y(x)\\ z=z(x)\end{cases}$ funtzioak definitzen ditu $x=0$ puntuaren ingurunean, $y(0)=0$ eta $z(0)=\pi$ direlarik. Kalkulatu funtzio horien lehenengo deribatuak $x=0$ puntuan.

(Puntu 1)

$\begin{cases}x\cdot\cos y+y\cdot\cos z+z\cdot\cos x=\pi\\ x^2+y^2+z^2-x\cdot y=\pi^2\end{cases}$ ekuazio-sistema x-rekiko deribatuko dugu, $y=y(x)$ eta $z=z(x)$ direla kontuan hartuta:

$$\begin{cases}\cos y - x\cdot y'\cdot\sin y + y'\cdot\cos z - y\cdot z'\cdot\sin z + z'\cdot\cos x - z\cdot\sin x = 0\\ 2x+2y\cdot y'+2z\cdot z'-y-x\cdot y'=0\end{cases}$$

Eta, $(0,y(0),z(0))=(0,0,\pi)$ puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases}1-y'(0)+z'(0)=0\\ 2\pi\cdot z'(0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad z'(0)=0 \quad \Rightarrow \quad y'(0)=1\end{cases}$$

OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA (3. partziala)

Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira

Iraupena: Ordu bat eta erdi

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

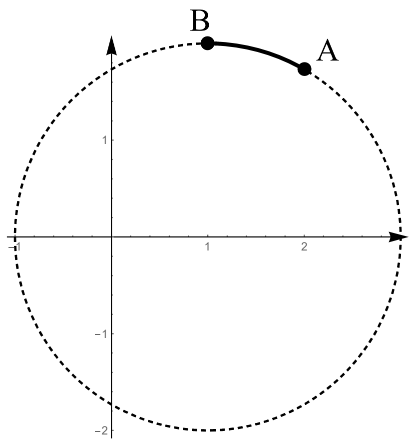
TALDEA:

1.- Izan bedi $A\left(2,\sqrt{3}\right)$ eta $B(1,2)$ puntuen artean definitutako $C\equiv(x-1)^2+y^2=4$ kurbaren zatia.

a) Kalkulatu $\int_C f(x,y)\,ds$, non $f(x,y)=x+y$

b) Kalkulatu $\int_C \vec{F}(x,y)\,d\vec{r}$, non $\vec{F}(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$

(1.5 puntu)



a) $\int_C f(x,y)\,ds=\int_h^k f(x(t),y(t))\cdot|\vec{r}'(t)|\,dt$, non $C\equiv\vec{r}(t)\equiv\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad h\le t\le k$

Kasu honetan:

$$C\equiv(x-1)^2+y^2=4 \quad\Leftrightarrow\quad C\equiv\vec{r}(t)\equiv\begin{cases}x=1+2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}\quad \frac{\pi}{3}\le t\le\frac{\pi}{2}\quad (*)$$

(*) $A\left(2,\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + 2\cos t \\ \sqrt{3} = 2\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{1}{2} \\ \sin t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$

$B(1,2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + 2\cos t \\ 2 = 2\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = 0 \\ \sin t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$

$\vec{r}'(t) \equiv \begin{cases} x' = -2\sin t \\ y' = 2\cos t \end{cases} \Rightarrow \left|\vec{r}'(t)\right| = 2$

Beraz, $\int_C f(x,y)\,ds = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos t + 2\sin t)2dt = \left[2t + 4\sin t - 4\cos t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \pi + 4 - \dfrac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3} + 2 = \dfrac{\pi}{3} + 6 - 2\sqrt{3}$

b) $\int_C \vec{F}(x,y)\,d\vec{r} = \int_C \left(Xdx + Ydy\right) = \int_C \left(xdx + ydy\right)$

Kasu honetan $X = x$ eta $Y = y$

$\int_C \vec{F}(x,y)\,d\vec{r} = \int_C \left(Xdx + Ydy\right) = \int_2^1 xdx + \int_{\sqrt{3}}^2 ydy = \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_2^1 + \left.\dfrac{y^2}{2}\right|_{\sqrt{3}}^2 = \dfrac{1}{2} - 2 + 2 - \dfrac{3}{2} = -1$

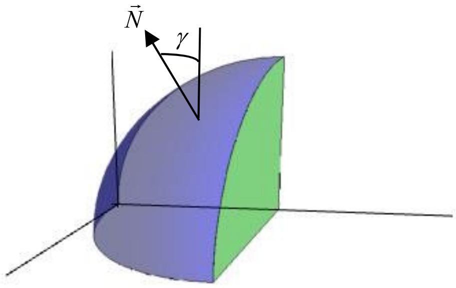
Baita a) atalean erabilitako parametrizazioa ere erabil genezake:

$C \equiv \vec{r}(t) \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{3} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2\sin t \\ dy = 2\cos t \end{cases}$

$\int_C \vec{F}(x,y)\,d\vec{r} = \int_C \left(xdx + ydy\right) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\sin t\left(1 + 2\cos t\right) + 2\sin t \cdot 2\cos t\right]dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -2\sin t dt = 2\cos t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -1$

2.- Irudian erakusten den bolumena hurrengoa izanda:

$$V \equiv \begin{cases} x \geq 0,\ z \geq 0,\ y \leq 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y \leq 0 \end{cases}$$



a) Kalkulatu $\iiint_V z\, dxdydz$ **.**

b) Izan bedi $\vec{F}(x,y,z) = xz \cdot \vec{i} + (y-1)z \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}$ **funtzio bektoriala. Kalkulatu** ***V*-ren mugako gainazal esferikotik irteten den fluxua.**

(2 puntu)

a) $V \equiv \begin{cases} x \geq 0,\ z \geq 0,\ y \leq 1 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$ <u>esferikoetan</u> adierazita (poloa (0,1,0) puntuan jarrita):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = 1 + \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \quad |J| = \rho^2 \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

Orduan, $\iiint_V z\, dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^3 \sin\varphi\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \left. \frac{\sin^2\varphi}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^1 = \frac{\pi}{16}$

<u>Zilindrikoetan</u> egingo bagenu:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 1 + \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-\rho^2} \end{cases}$$

Orduan,

$$\iiint_V z\, dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho z\, dz\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho\left(1-\rho^2\right) d\rho = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{16}$$

b) S gainazaletik irteten den $\vec{F}$-ren fluxua $= \iint_S \vec{F} d\vec{S} = \iint_S \left(xz\, dydz + (y-1)z\, dzdx + z^2\, dxdy \right)$

Kasu honetan, $S \equiv z = \sqrt{1 - x^2 - (y-1)^2} \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \quad y \leq 1 \end{cases}$

Orduan, $\iint_S \vec{F} d\vec{S} = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N} \right) dxdy$

Eta, $\vec{N}=\left(-z'_x,-z'_y,1\right)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}},\dfrac{y-1}{\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}},1\right)$, $\gamma<\dfrac{\pi}{2}$

$$\vec{F}\cdot\vec{N}=x^2+(y-1)^2+1-x^2-(y-1)^2=1 \quad\Rightarrow\quad \iint_S \vec{F}d\vec{S}=\iint_{R_{xy}} dxdy = Azalera\left(R_{xy}\right)=\frac{\pi}{4}$$

<u>Beste modu batera</u>:

S gainazalarekin batera $x=0,\ y=1$ eta $z=0$ planoak hartuko bagenitu, S' gainazal itxia osatuko genuke, V solidoaren muga, hain zuzen ere. Honela:

$$S' \text{ gainazaletik irteten den } \vec{F}\text{-ren fluxua} = \iint_{S'} \vec{F}d\vec{S}=\iint_S \vec{F}d\vec{S}+\iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S}+\iint_{S_2} \vec{F}d\vec{S}+\iint_{S_3} \vec{F}d\vec{S}$$

non $S_1 \equiv x=0,\ S_2\equiv y=1$ eta $S_3\equiv z=0$

Eta, S' gainazal itxia denez, Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$S' \text{ gainazaletik irteten den } \vec{F}\text{-ren fluxua} = \iint_{S'} \vec{F}d\vec{S}=\iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz$$

Eta, $div\left(\vec{F}\right)=z+z+2z=4z \quad\Rightarrow\quad \iint_{S'} \vec{F}d\vec{S}=\iiint_V 4z\,dxdydz \overset{a)\text{ ateleko emaitza}}{=} 4\cdot\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{\pi}{4}$

Orain, $S_1\equiv x=0,\ S_2\equiv y=1$ eta $S_3\equiv z=0$ zatietatik irteten diren fluxuak kalkulatu behar ditugu (gogoratu: $\iint_S \vec{F}d\vec{S}=\iint_S\left(xz\,dydz+(y-1)z\,dzdx+z^2\,dxdy\right)$):

$$S_1\equiv x=0 \quad\Rightarrow\quad dx=0 \quad\Rightarrow\quad \iint_{S_1}\vec{F}d\vec{S}=0$$

$$S_2\equiv y=1 \quad\Rightarrow\quad dy=0 \quad\Rightarrow\quad \iint_{S_2}\vec{F}d\vec{S}=0$$

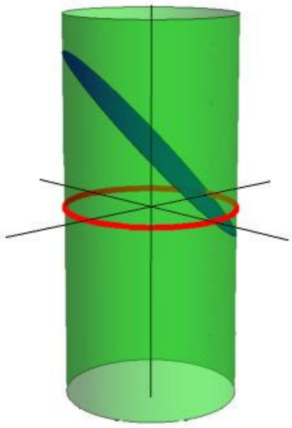
$$S_1\equiv z=0 \quad\Rightarrow\quad dz=0 \quad\Rightarrow\quad \iint_{S_3}\vec{F}d\vec{S}=0$$

Beraz, S gainazaletik irteten den $\vec{F}$-ren fluxua $=\iint_S \vec{F}d\vec{S}=\iint_{S'} \vec{F}d\vec{S}-\iint_{S_1} \vec{F}d\vec{S}-\iint_{S_2} \vec{F}d\vec{S}-\iint_{S_3} \vec{F}d\vec{S}=\dfrac{\pi}{4}$

3.- Kalkulatu $x^2+y^2=a^2$ gainzalaren barrualdean dagoen $x+y+z=a$ gainazalaren azalera.

(Puntu 1)

$$S \text{ gainazaleren azalera} = \iint_S dS$$



Kasu honetan,

$$S \equiv z = a - x - y \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \le a^2$$

Orduan, $\iint_S dS = \iint_{R_{xy}} \left|\vec{N}\right| dxdy$

Eta,

$$\vec{N} = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right) = (1,1,1) \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{N}\right| = \sqrt{3}$$

Beraz, $\iint_S dS = \sqrt{3} \iint_{R_{xy}} dxdy = \sqrt{3} \cdot Azalera\left(R_{xy}\right) = \pi a^2 \sqrt{3}$

4.- Izan bitez $\vec{F}(x,y,z)=\left(x^2+y+\sin\left(e^z\right),\ y^2+3x+\cos\left(e^z\right),\ z+\sin(x)\right)$ **funtzio bektoriala eta** $V\equiv\begin{cases} z\le 2-\sqrt{x^2+y^2} \\ z\ge 2\left(x^2+y^2\right)-1\end{cases}$ **solidoa. Kalkulatu:**

a) ***V*** **solidoaren bolumena.**

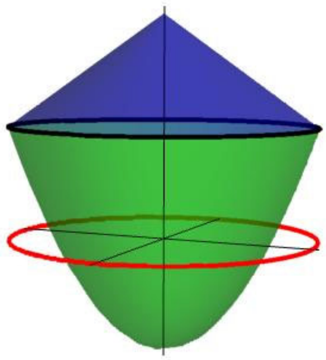
b) ***V*** **solidoaren muga den** ***S*** **gainazaletik irteten den** $\vec{F}$ **-ren fluxua.**

c) $\vec{F}$ **-ren zirkulazioa** ***V*****-ren muga osatzen duten bi gainazalen arteko** ***C*** **ebakidura-kurban zehar.**

(2.5 puntu)

a) V solidoaren bolumena $=\iiint\limits_V dxdydz$

Solidoa mugatzen duten bi gainazalen arteko ebakidura-kurba kalkulatuz:



$$\begin{cases} z=2-\sqrt{x^2+y^2} & \Rightarrow \quad x^2+y^2=(2-z)^2 \\ z=2\left(x^2+y^2\right)-1 & \Rightarrow \quad x^2+y^2=\dfrac{z+1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 4-4z+z^2=\frac{z+1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2z^2-9z+7=0$$

$$\Leftrightarrow \quad z=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{4}=\frac{9\pm 5}{4}=\begin{cases}\dfrac{7}{2}>2 \text{ (ez du balio)} \\ 1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\equiv\begin{cases} x^2+x^2=1 \\ z=1\end{cases}$$

Zilindrikoetan: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z\end{cases} \quad |J|=\rho \quad \Rightarrow \quad V\equiv\begin{cases} z\le 2-\rho \\ z\ge 2\rho^2-1\end{cases}\equiv\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 1 \\ 2\rho^2-1\le z\le 2-\rho\end{cases}$

Beraz,

$$\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{2\rho^2-1}^{2-\rho}\rho\, dz\, d\rho\, d\theta=2\pi\int_0^1\rho\left(2-\rho-2\rho^2+1\right)d\rho=2\pi\int_0^1\left(3\rho-\rho^2-2\rho^3\right)d\rho=$$

$$=2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{4\pi}{3}$$

b) S gainazaletik irteten den $\vec{F}$-ren fluxua $=\iint\limits_S \vec{F}d\vec{S}$

S, V solidoaren muga izanik, gainazal itxia delarik. $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak dira, beraz Gauss-en teorema erabil daiteke:

$$\iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz = \iiint_V (2x+2y+1)dxdydz$$

x eta y funtzio bakoitiak dira, eta V solidoa $x=0$ eta $y=0$ planoekiko simetrikoa da, beraz, $\iiint_V xdxdydz = 0$ eta $\iiint_V ydxdydz = 0$, orduan:

$$\iint_S \vec{F}d\vec{S} = \iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz = \iiint_V dxdydz = V\text{-ren bolumena} = \frac{4\pi}{3}$$

c) $\vec{F}$ -ren zirkulazioa $C \equiv \begin{cases} x^2+x^2=1 \\ z=1 \end{cases}$ kurban zehar:

$$\int_C \vec{F}d\vec{r} = \int_C \left(\left(x^2+y+\sin\left(e^z\right)\right)dx + \left(y^2+3x+\cos\left(e^z\right)\right)dy + \left(z+\sin\left(x\right)\right)dz\right)$$

Nahiko integral konplikatua denez, beste modu batean egiten saiatuko gara.

C kurba itxia denez, eta, $\vec{F}$ eta bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak direnez, Stokes-en teorema erabil daiteke:

$$\int_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)d\vec{S}$$

non $S \equiv z=1 \quad \forall(x,y) \in R_{xy} \equiv x^2+x^2 \leq 1$

Orduan, $\int_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)d\vec{S} = \pm\iint_{R_{xy}} \left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N}\right)dxdy$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \left(e^z\cdot\sin\left(e^z\right), e^z\cdot\cos\left(e^z\right)-\cos x, 3-1\right) = \left(e^z\cdot\sin\left(e^z\right), e^z\cdot\cos\left(e^z\right)-\cos x, 2\right)$$

Eta, $\vec{N} = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right) = \left(0,0,1\right)$, $\gamma < \frac{\pi}{2}$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{N} = 2 \quad \Rightarrow \quad \int_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right)d\vec{S} = 2\iint_{R_{xy}} dxdy = 2\cdot Azalera\left(R_{xy}\right) = 2\pi$$